ISSN-e: 1856-9811

INTERPOLACIÓN DE A-PARCHES CONSTRUIDOS CON CUBOIDES.

INTERPOLATING A-PARCHES CONSTRUCTED WITH CUBOIDS.

FRANCISCO TOVAR[1].
ftovar@unimet.edu.ve
Universidad Metropolitana de Caracas (Venezuela).

JULIO C. DAZA[2]
daza@unimet.edu.ve
Universidad Metropolitana de Caracas (Venezuela).

Resumen

El objetivo de esta investigación es diseñar y controlar un segmento de una superficie algebraica de grado tres o cuboide. El cuboide se requiere para interpolar dos cónicas dadas, que se encuentran en dos planos diferentes en el espacio, esto se denomina A-Patch de interpolación. Para lograr este objetivo, se ha estudiado la expresión del cuboide en coordenadas tetraédricas y se ha utilizado la propiedad de que estas superficies contienen líneas rectas. Las condiciones para conectar dos segmentos de cuboides con clase G^1 Es decir, coincidencia o continuidad de los planos tangentes sobre la curva de contacto de los segmentos del cuboide. La conexión de dos o más segmentos de cuboides con clase G^1 es lo que se denomina A-Patch. También se destaca que cierta familia de perfiles planos cuboides son elipses para la construcción de superficies tubulares.

Palabras clave: Cuboide, conexión de clases, A-Parches, coordenadas tetraédricas, cónicas. G^1A-Parches, coordenadas tetraédricas, cónicas.

1 Doctor en Ciencias, mención Matemáticas, Magister Sc. en Matemática Aplicada. Licenciatura en Matemáticas, Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. https://orcid.org/0000-0002-5662-5160.

2 Magister Sc. mención en Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. *https://orcid.org/0000-0003-0685-988X.*

Summary

The objective of this research is to design and control a segment of a degree three algebraic surface or cuboid. The cuboid is required to interpolate two given conics, which lie in two different planes in space, this is called an interpolation A-Patch. To achieve this objective, the expression of the cuboid in tetrahedral coordinates was studied and the property that these surfaces contain straight lines was used. The conditions for connecting two segments of cuboids with class G^1 This means, coincidence or continuity of the tangent planes on the contact curve of the cuboid segments. The connection of two or more cuboid segments with class G^1 is what is called an A-Patch. It is also emphasized that a certain family of cuboid planar profiles are ellipses for the construction of tubular surfaces.

Keywords: Cuboid, class connection, A-Parches, tetrahedral coordinates, conics. G^1 A-Parches, tetrahedral coordinates, conics.

RECIBIDO: 09-01-2024 / ACEPTADO: 11-07-2024 / PUBLICADO: 30-09-2024

Cómo citar: Tovar y Daza (2024). Interpolación de A-Parches construidos con cuboides. *Anales*, 40, 1 - 14. https://doi.org/10.58479/acbfn.2024.100

ISSN-e: 1856 - 9811

CONTENIDO

Introducción

Los antecedentes de esta investigación son los estudios de ciertas superficies tubulares diseñadas con la envolvente de una familia cuadrática monoparamétrica de esferas presentados en: Bohem, W. y Paluszny, M. (1998), Paluszny, M. y Boehm, W. (1998) y Franquiz J.; Paluszny, M. y Tovar, F. (2006). La ecuación implícita de tales superficies tubulares tiene en general grado 4, y en ciertos casos particulares es de grado 3, es decir, la superficie tubular es un cuboide. Dado que estas superficies tubulares están formadas por perfiles circulares, es posible prescribir dos círculos de interpolación para el diseño de splines tubulares. Estas splines tubulares se construyen generalmente con clase G^1. Nuestro estudio generaliza la expresión de esta superficie tubular de grado 3, de modo que interpola cualquier par de cónicas situadas en dos planos diferentes en el espacio, utilizando una sección de esta superficie. En particular, se hace hincapié en el caso de que las cónicas de interpolación dadas sean elipses y que ciertos perfiles planos del cuboide sean también elípticos. De este modo, se pueden diseñar superficies tubulares de grado tres con perfiles elípticos. En Xu G.; Huang, H. y Bajaj, C. (2001), se construyen splines con segmentos de superficies algebraicas, que se denominan A-Parches, en nuestro caso vamos a utilizar específicamente superficies algebraicas de grado 3 para construir los A-Parches. En esta construcción utilizamos segmentos del cuboide en coordenadas tetraédricas y estudiamos la conexión de dos segmentos de superficie en la traza del cuboide con el tetraedro. Se propone la construcción de un cuboide interpolante en coordenadas tetraédricas controlando cada perfil de superficie. Para ello se considera la familia de cuboides tal que una de sus rectas coincida con una de las aristas del tetraedro. De esta forma los perfiles cónicos del cuboide son la consecuencia de abatir la superficie desde la cónica inicial de interpolación hasta la cónica final, con una familia de planos que tienen en común esa recta. El proceso es similar al caso de superficies tubulares descrito en Bohem, W. y Paluszny, M. (1998), Franquiz, J.; Paluszny, M. y Tovar, F. (2006). Los segmentos construidos en este artículo interpolan una secuencia de cónicas dadas en el espacio y pueden conectarse con la clase G^1.

Nótese que si se considera el problema de interpolar dos cónicas en R^3 que se encuentran en dos planos diferentes, con una superficie algebraica de grado dos o cuádrica, no se tienen suficientes grados de libertad para resolver el problema. Por esta razón se utilizan los cuboides.

2. Superficie algebraica de grado tres o cuboide.

$$C(s,t,u,v)=\sum_{i=1}^{20} a_i s^l t^m u^n v^k, l+m+n+k=3, a_i \in \mathbb{R} \quad (1)$$ da por:

Si la superficie $C(s,t,u,v)=0$ contiene la línea $s=0, u=0$ su expresión se reduce a

$$C_a(s,t,u,v)=uCs_a(t,u,v)+sCu_a(s,t,v)+suP_a(s,t,u,v) \quad (2)$$

Dónde:

$$Cs_a(t,u,v)=a_1u^2+a_2tu+a_3t^2+a_4uv+a_5v^2+a_6tv \quad (3)$$

$$Cu_a(s,t,v)=a_7s^2+a_8ts+a_9t^2+a_{10}sv+a_{11}v^2+a_{12}tv \quad (4)$$

$$P_a(s,t,u,v)=a_{13}s+a_{14}t+a_{15}u+a_{16}v \quad (5)$$

El subíndice a es necesario para distinguir dos cuboides diferentes al estudiar la conexión entre el G^1.

La intersección del cuboide dado por (2) con el plano $s=0$ resulta el cúbico reducible $uCs_a(t,u,v)=0$ y análogamente el cúbico reducible resulta $sCu_a(s,t,v)=0$ al intersecar la ecuación (2) con el plano $u=0$.

Los coeficientes que definen el plano $P_a(s,t,u,v)=0$ son libres y se utilizarán para controlar el tipo de perfil del cuboide y la conexión entre dos segmentos de superficie. El cuboide interpola las cónicas prefijadas por $Cs_a(t,u,v)=0$ en el plano $s=0$ y $Cu_a(s,t,v)=0$ en el plano $u=0$. En la figura 1 se muestra un ejemplo de cuboide que contiene una recta.

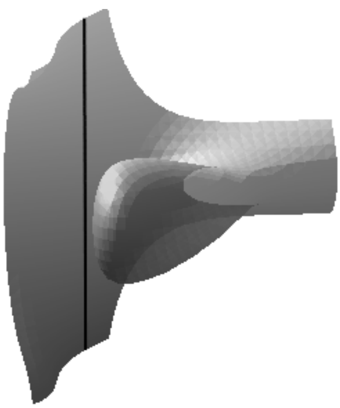

Figura 1. Ejemplo de cuboide que contiene una recta.

Obsérvese que las cónicas de interpolación inicial y final del cuboide están prescritas, con los coeficientes de las cónicas (3) y (4). Aquí es evidente que si se pretende hacer este procedimiento utilizando superficies de grado 2. El cuboide no tiene suficientes parámetros libres para definir las dos cónicas de interpolación independientemente. La figura 2 muestra un segmento de cuboide que interpola dos cónicas dadas.

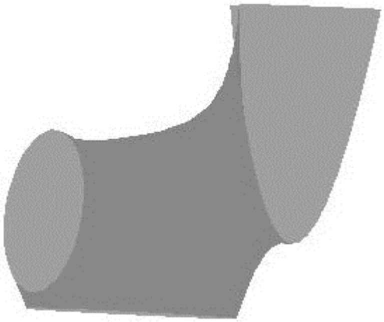

Figura 2. Cuboide que interpola dos cónicas dadas, en este caso una elipse y una parábola.

3. Conexión de dos segmentos cuboides de clase G^1.

Supongamos que tenemos dos cuboides, el primero dado por la ecuación (2) y el segundo dado por

$$C_b(s,t,u,v) = uCs_b(t,u,v) + sCu_b(s,t,v) + suP_b(s,t,u,v) \tag{6}$$

Dónde:

$$Cs_b(t,u,v) = \alpha a_1 u^2 + \alpha a_2 tu + \alpha a_3 t^2 + \alpha a_4 uv + \alpha a_5 v^2 + \alpha a_6 tv \tag{7}$$

$$Cu_b(s,t,v) = b_7 s^2 + b_8 ts + b_9 t^2 + b_{10} sv + b_{11} v^2 + b_{12} tv \tag{8}$$

$$P_b(s,t,u,v) = b_{13} s + b_{14} t + b_{15} u + b_{16} v \tag{9}$$

La ecuación (6) muestra un segundo cuboide que conecta con el primer cuboide con clase G^0ya que coinciden en el plano $s = 0$. La figura 3 muestra dos cuboides conectados de clase G^0.

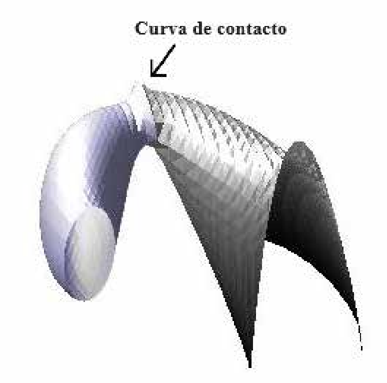

Figura 3. Ejemplo de dos segmentos cuboides conectados por clase . G^0.

Estableciendo las condiciones para que la familia de planos tangentes coincida a lo largo de la cónica común en el plano $s = 0$ obtenemos los coeficientes del segundo cuboide dados por (6):

$$\{b_9 = \alpha a_9, b_{11} = \alpha a_{11}, b_{12} = \alpha a_{12}, b_{14} = \alpha a_{14}, b_{15} = \alpha a_{15}, b_{16} = \alpha a_{16}\}$$

donde α es un parámetro real.

Esta es la solución del sistema de ecuaciones, que resulta de calcular los coeficientes de la familia de planos tangentes, sobre la curva de interpolación tendida sobre el plano $s = 0$ y hallar las condiciones para que todos ellos coincidan en esta cónica. Estas condiciones restan grados de libertad a la elección de la cónica de interpolación del segundo cuboide sobre el plano $u = 0$ dada por la expresión (6) dejando sólo tres coeficientes libres para el diseño de esta cónica, estos son: b_7, b_8 y b_{10} de la ecuación (8). El coeficiente b_{13} de la expresión (9) es libre y permite dilatar o contraer el segmento cuboide $C_b(s, t, u, v)$.

En conclusión, para que dos cuboides estén conectados con clase G^1 la ecuación del primero debe venir dada por (2) y la ecuación del segundo debe venir dada por (6), donde:

$$Cs_b(t, u, v) = \alpha a_1 u^2 + \alpha a_2 tu + \alpha a_3 t^2 + \alpha a_4 uv + \alpha a_5 v^2 + \alpha a_6 tv \tag{10}$$

$$Cu_b(s, t, v) = b_7 s^2 + b_8 ts + \alpha a_9 t^2 + b_{10} sv + \alpha a_{11} v^2 + \alpha a_{12} tv \tag{11}$$

$$P_b(s, t, u, v) = b_{13} s + \alpha a_{14} t + \alpha a_{15} u + \alpha a_{16} v \tag{12}$$

En la figura 4, se puede observar que dos cuboides están conectados con clase G^1 ya que los planos tangentes coinciden a lo largo de la curva de contacto. Interpola una elipse inicial, conecta en otra elipse y termina en una parábola.

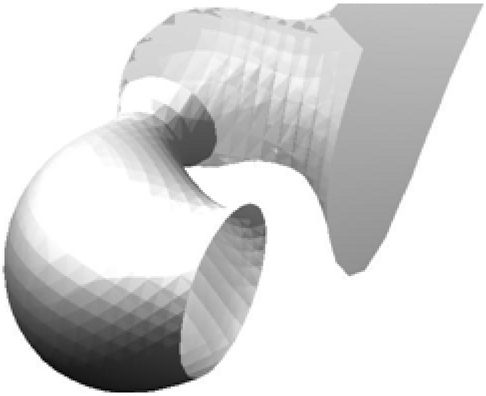

Figura 4. Dos cuboides conectados por clase. G^1.

Manipulando los coeficientes libres en el segundo cuboide, se pueden obtener otros A-Parches interpolantes. La figura 5 muestra un ejemplo de dos cuboides que se conectan por clase G^1 generando dos tubos elípticos.

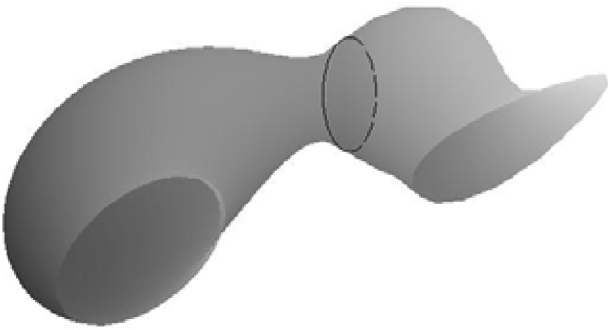

Figura 5. Dos cuboides formados por perfiles elípticos, conectados con clase G^1.

4. Cuboide con perfiles elípticos.

En el caso de la construcción de superficies tubulares clásicamente estudiadas, como los cíclidos, sus perfiles son círculos (véase Paluszny, M. y Boehm, W. (1998), Paluszny, M. y Tovar, F. (2006)). Para un cuboide dado por (2) los perfiles superficiales son cónicos. En particular, para la construcción de superficies tubulares utilizando cuboides, utilizaremos perfiles elípticos. El análisis completo de este caso está publicado en Tovar, F., Otero, J. y Daza, J. (2023). No obstante, se presentan los hechos más relevantes:

De modo que el cuboide dado por (nótese que la siguiente expresión coincide con la dada en (2), sólo que no tiene el subíndice *a*):

$$C(s,t,u,v) = uCs(t,u,v) + sCu(s,t,v) + suP(s,t,u,v)$$

está formado por perfiles elípticos, se requieren dos condiciones geométricas:

1) La cúbica en el infinito del cuboide debe ser reducible, es decir, el producto de una cónica por una recta.

2) La cónica definida por la cúbica en el infinito debe ser imaginaria.

Estas dos propiedades garantizan que las cónicas que forman los perfiles cuboides son elipses.

Si la cúbica en el infinito viene dada por el producto de una recta por una cónica, la expresión de esta curva debe ser de la forma:

$$C_i(s,t,u) = (As^2 + Bsu + Cu^2 + Dst + Etu + Ft^2)(Hs + Jt + Ku) \tag{13}$$

donde los coeficientes de la expresión (13) dependen de las cónicas de interpolación y del plano dado en (5) es decir, los coeficientes a_i del cuboide. Se derivan dos casos, el primero $F \neq 0$ y $J = 0$. Los coeficientes de la cónica en el infinito vienen determinados por la expresión

$$H = \frac{a_{11} - a_{12} + a_9}{F} \qquad K = \frac{a_3 + a_5 - a_6}{F}$$

$$A = \frac{a_{10} - a_{11} - a_7}{H} \qquad C = \frac{a_1 - a_4 + a_5}{K}$$

$$D = \frac{-a_{10} + 2a_{11} - a_{12} + a_8}{H}$$

$$E = \frac{a_2 - a_4 + 2a_5 - a_6}{K}$$

$$a_{13} = AK + BH + a_{10} - 2a_{11} + a_{16} - a_5$$

$$a_{14} = DK + EH - 2a_{11} + a_{12} + a_{16} - 2a_5 + a_6$$

$$a_{15} = BK + CH - a_{11} + a_{16} + a_4 - 2\,a_5$$

Donde B, F y a_{16} son parámetros libres utilizados para modificar la forma del cuboide de interpolación. La cúbica en el infinito se define en términos de las dos cónicas de interpolación y los parámetros B, F y a_{16}.

Finalmente, la expresión del cuboide de interpolación obtenido es:

$$C(s,t,u,v) = uCs(t,u,v) + sCu(s,t,v) + suP(s,t,u,v) \tag{14}$$

donde:

$$P(s,t,u,v) = (AK + BH + a_{10} - 2a_{11} + a_{16} - a_5)s + (DK + EH - 2a_{11} + a_{12} + a_{16} - 2a_5 + a_6)t + (BK + CH - a_{11} + a_{16} + a_4 - 2a_5)u + a_{16}v$$

Utilizando el hecho de que las cónicas de interpolación prescritas son elipses, se garantiza que los perfiles cuboides también son elipses, para ciertos valores de B. El polinomio $P(B)$ tiene raíces reales y basta con elegir el valor de B entre ambas raíces si $F > 0$ y en el caso $F < 0$ se elige B entre las raíces del polinomio.

El segundo caso: $F = 0$ y $J \neq 0$ se expresa la ecuación de la cúbica en el infinito:

$C_i(s,t,u) = (As^2 + Bsu + Cu^2 + Dst + Etu)(Hs + Jt + Ku)$. *Al* igual que en el caso anterior, al sustituir $v = -s - t - u$ en la ecuación (2) en el caso anterior, el resultado son ecuaciones no lineales para los coeficientes A, B, C, D, E, H, J & K Estos son:

$$A = -\frac{a_{10} - a_{11} - a_7}{H} \qquad C = \frac{a_1 - a_4 + a_5}{K}$$

$$D = \frac{a_{11} - a_{12} + a_9}{J} \qquad E = \frac{a_3 + a_5 - a_6}{J}$$

$$a_{13} = AK + BH + a_{10} - 2a_{11} + a_{16} - a_5$$

$$a_{14} = BJ + DK + EH - 2a_{11} + a_{12} + a_{16} - 2a_5 + a_6$$

$$a_{15} = BK + CH - a_{11} + a_{16} + a_4 - 2a_5$$

$$H = -\frac{AJ + a_{10} - 2a_{11} + a_{12} - a_8}{D} \qquad K = -\frac{CJ - a_2 + a_4 - 2a_5 + a_6}{E}$$

Las expresiones de los coeficientes A y H están relacionadas. Para que se cumplan ambas ecuaciones es necesario calcular los ceros de un polinomio de grado dos en $[H,J]$ dado por:

$$P[H,J] = (a_{12} - a_{11} - a_9)H^2 - (a_{10} - 2a_{11} + a_{12} - a_8)HJ + (a_{10} - a_{11} - a_7)J^2$$

El discriminante del polinomio $P[H,J]$ denotado por $\Delta(C_u)$ que es positivo porque la cónica es una elipse. C_u una elipse. Por lo tanto, tiene solución y se pueden calcular sus dos raíces.

Un hecho similar ocurre con las expresiones para los coeficientes de C y K y el polinomio resulta de ambas expresiones:

$$P[K,J] = (-a_3 - a_5 + a_6)K^2 - (a_2 - a_4 + 2a_5 + a_6)KJ - (a_1 - a_4 + a_5)J^2$$

El determinante del polinomio $P[K,J]$ denotado por $\Delta(C_s)$ es positivo porque la cónica C_s una elipse, por lo tanto, tiene solución y se pueden calcular sus dos raíces.

Calculando los valores de H y K a partir de los polinomios $P[H,J]$ y $P[K,J]$se pueden calcular el resto de los coeficientes, dejando libres los coeficientes B,J y a_{16}.

Estos perfiles elípticos pueden ser reales o imaginarios. En el caso de las elipses imaginarias, aparece una desconexión del cuboide, que está controlada por los coeficientes libres del cuboide. Para el cuboide dado por (14) los parámetros libres permiten controlar la forma de la superficie.

La figura 6muestra un cuboide que interpola dos elipses y además todos los perfiles que se producen al ablacionar con los planos son también elípticos.

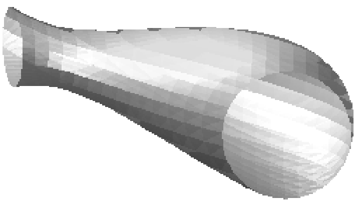

Figura 6. Cuboide formado por perfiles elípticos.

5. Conclusión

Del análisis realizado en superficies algebraicas de grado 3, se concluye que es posible construir y controlar segmentos de superficies algebraicas que interpolan dos cónicas en el espacio. En el análisis de estos cuboides se utilizó la propiedad que tienen estas superficies algebraicas de contener rectas. En particular, en el caso de que el cuboide contenga una sola recta, se utilizó esta recta para abanicar una familia de planos, que al interceptar el cuboide, da como resultado una familia de cónicas en $3D$ similar a las superficies tubulares descritas en Paluszny, M. Boehm, W. (1998), denominadas cíclicas. Con este método, se construye un segmento de superficie algebraica cuyos perfiles son cónicas e interpola dos cónicas prescritas, véase la figura 1. G^0 véase la Figura 3, es decir, la interpolación a lo largo de una cónica en el espacio y de clase G^1 lo que supone una mayor suavidad en la curva de contacto, ya que, en esta curva, coinciden los planos tangentes de ambos cuboides, véanse las figuras 4 y 5. Los coeficientes libres resultantes para el control de los cuboides, permiten modificar su forma preservando las condiciones de interpolación. La figura 7 muestra el cambio del segmento del cuboide al variar el parámetro a_{16}.

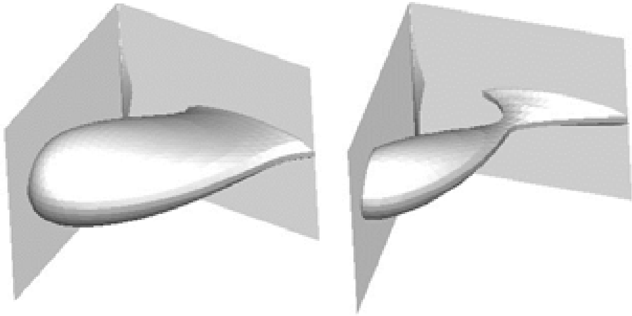

Figura 7. Cambio de la forma del cuboide al modificar el parámetro . α_{16}.

Referencias

Bohem, W y Paluszny, M. (1998). “General Cyclides as joining pipes”*. Computer Aided Geometry Design* Vol.15, pp.699-710.

Franquiz J., Paluszny M. y Tovar, F. (2006). Cíclidos y círculo director. *Mathematics and Computers in Simulation* 73 (1), 168-174.

Paluszny, M. y Boehm, W. (1998). “Ciclides generales”*. Computer Aided Geometry Design .*Vol.15 (7),pp.699-710.

Tovar, F., Otero, J. y Daza, J. (2023). “Interpolación de cónicas en 3D, usando cuboides”. *Ciencias e Ingeniería, Universidad de los Andes (ULA)*. Vol. 44 No.1, pp. 43-48.

Xu G., Huang H. y Bajaj C. (2001*).* “C^1 Modeling with a-patches from rational trivariate function”*. Computer Aided Geometry Design*, Vol.18, pp.221-243.